

Rijen en reeksen

Keuzeonderwerp Atheneum 5

wiskunde B1 en B12



Mei 2008

Remy van Bergen
Peter Mulder

Dit boekje gaat over rijen en reeksen. Wiskundige rijen! Rijen worden in de wiskunde op verschillende manieren gedefinieerd. Met behulp van de wiskunde kunnen we een groot aantal vragen beantwoorden over rijen en reeksen.

Hoe gaat de rij 3, 6, 9, 12, ... verder? En

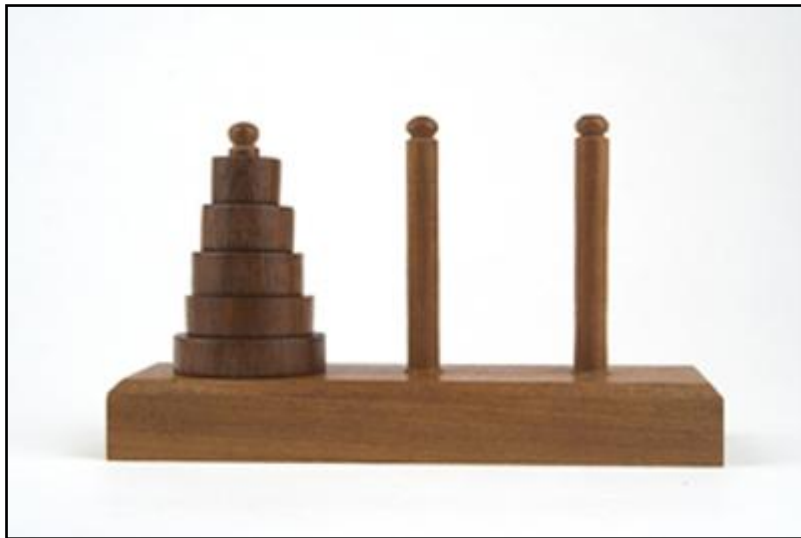
1, 1, 2, 4, 7, ...?

En 5, 10, 20, 40, 80, ...?

Wat zou van deze rijen de 40^{ste} term zijn?

Opgave 0. Beantwoord deze vragen.

Maar je kunt meer vragen stellen. Wat krijg je als je de eerste 100 termen optelt? Is er een formule te maken? Wat zijn de toepassingen? Op dit soort vragen zul je met behulp van dit stencil het antwoord kunnen vinden.



1. De torens van Hanoi

Hierboven zie je de torens van Hanoi. In dit oude spel is het de bedoeling dat je de hele stapel schijven, die nu op de linker toren zit, verplaatst naar de rechter toren.

Maar er zijn 2 regels:

1. je mag maar 1 schijf tegelijk verplaatsen;
2. een grotere schijf mag nooit bovenop een kleinere schijf liggen.

Laten we beginnen met een wat kleinere puzzel dan degene hierboven:

Opgave 1. Bedenk zelf hoe je de torens van Hanoi met 2 schijven zou oplossen. Hoeveel stappen heb je minimaal nodig?

Met 2 schijven was het tamelijk simpel. Laten we eens kijken wat we moeten doen als we drie schijven hebben.

Denk maar even mee, we gaan hier even heel nauwkeurig naar kijken:

Als we deze schijven naar de rechtertoren willen hebben, dan moeten we dus zorgen dat de onderste (grootste) schijf onderaan komt op de rechtertoren. Om dit te kunnen doen, moeten de andere 2 schijven uit de weg. Ze moeten dus even op de middelste toren staan zodat de weg vrij is voor de grootste schijf.

Bij stap 4 zie je de grootste schijf verplaatst worden. De stappen die daaraan vooraf gaan, zijn de 3 stappen die nodig zijn om de 2 schijven op de middelste toren te krijgen.

Als het goed is heb je bij Opgave 1 ook gevonden dat je hier 3 stappen voor nodig hebt.

Nadat je de grote schijf hebt verplaatst, kan je de 2 stenen weer daar bovenop zetten. Dat kost je weer 3 zetten.

Bij elkaar hebben we dus $3 + 1 + 3 = 7$ zetten nodig.

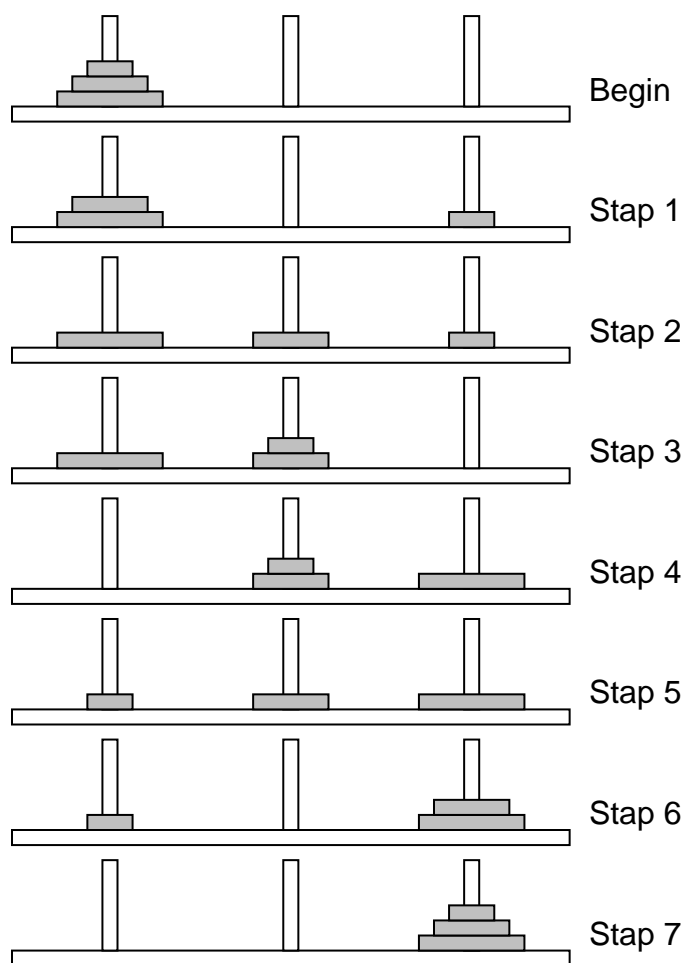
Opgave 2. Ga op dezelfde manier aan de slag met een toren met 4 schijven. Bedenk eerst op papier hoeveel zetten je nodig hebt, schrijf het idee achter je zetten op (eerst doe ik ..., dat kost ... zetten, etc.) en probeer daarna of het je ook lukt om de puzzel in dat aantal zetten op te lossen.

Het uitproberen van je zetten kan makkelijk op www.vanyper.be/hanoi_toren.htm.

2. Twee legendes

Er bestaat een legende over priesters in een Brahma-klooster in India, die in hun klooster een versie van dit spel hebben met 3 torens en 64 schijven. Sinds zeer lange tijd zijn de kloosterlingen bezig met het verslepen van de schijven. Als ze hun opdracht vervuld hebben, dan zal de wereld ten einde komen.

Geen prettig vooruitzicht, de vraag is echter of wij dit nog wel zullen meemaken. Hiervoor moeten we kunnen berekenen hoeveel zetten er nodig zijn om zo'n puzzel op te lossen.



Opgave 4.

- a. Vul de volgende tabel in:

Vakje	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Aantal rijstkorrels	1	2	4	8					

- b. Bereken in 1 keer het aantal rijstkorrels wat op het 64^{ste} vakje komt te liggen.
- c. Er gaan ongeveer 50 rijstkorrels in een kubieke centimeter. De oppervlakte van Nederland bedraagt 41.528 km². De hoeveelheid rijst die op het 64^{ste} vakje moet komen te liggen kan heel Nederland bedekken met een laag rijst. Bereken de dikte van deze laag.

Je ziet dat de getallen in zo'n recursieve berekening explosief kunnen stijgen. Dit biedt goede hoop voor het aantal zetten wat de priesters van Hanoi verwijderd zijn van het einde van de aarde.

3. Recursieve formules

We gaan weer terug naar de torens van Hanoi. Een formule voor het aantal zetten bij een toren van Hanoi zou er (informeel) zo uit kunnen zien:

$$\text{aantal zetten bij } n \text{ stenen} = \text{aantal zetten bij } n - 1 \text{ stenen} + 1 + \text{aantal zetten bij } n - 1 \text{ stenen}$$

oftewel:

$$\text{aantal zetten bij } n \text{ stenen} = 2 \times \text{aantal zetten bij } n - 1 \text{ stenen} + 1$$

Bijvoorbeeld:

$$\text{aantal zetten bij 4 stenen} = 2 \times \text{aantal zetten bij 3 stenen} + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15$$

Nu gaan we het wat wiskundiger opschrijven. Daarvoor voeren we in dat $A(n)$ het aantal zetten is wat nodig is om n stenen te verplaatsen.

De **recursieve formule** wordt dan:

$$A(n) = 2A(n - 1) + 1$$

Met alleen deze formule kan je nog niks uitrekenen, omdat je niet weet waarmee je moet beginnen. Om $A(1)$ te berekenen heb je bijvoorbeeld $A(0)$ nodig, en die weet je niet, want om die te berekenen heb je weer $A(-1)$ nodig. Wat we nog nodig hebben is een zogenaamde **randvoorwaarde**. In dit geval kunnen we als randvoorwaarde nemen: $A(0) = 0$. Dit betekent in het verhaal dat ik 0 zetten nodig heb om 0 stenen van de linker naar de rechter toren te verplaatsen. De totale beschrijving van de recursie wordt nu:

$$\begin{cases} A(0) = 0 \\ A(n) = 2A(n - 1) + 1 \end{cases}$$

Zo'n vergelijking heet een **recursievergelijking** en bestaat dus altijd uit een randvoorwaarde en een recursieve formule. Met de accolade ervoor geef je aan dat de twee regels bij elkaar horen.

Om $A(4)$ te berekenen begin je dus bij $A(0)$. Dan krijgen we de recursieve berekening:

$$A(1) = 2 \cdot A(0) + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$A(2) = 2 \cdot A(1) + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$A(3) = 2 \cdot A(2) + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$A(4) = 2 \cdot A(3) + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$$

Opgave 5. Geef de recursievergelijking voor berekening van de rijstkorrels op het schaakbord. Schrijf ook voor dit geval uit hoe je $A(4)$ zou moeten berekenen.

Opgave 6. Gegeven zijn de volgende recursievergelijkingen:

$$\begin{cases} P(0)=2 \\ P(n)=3P(n-1) \\ Q(0)=1 \\ Q(n)=Q(n-1)+4 \\ R(0)=1 \\ R(n)=3R(n-1)-1 \end{cases}$$

- Bereken $P(5)$, $Q(5)$ en $R(5)$.
- Hoe kan je $P(20)$ in één keer berekenen? (dus zonder eerst $P(0)$ tot en met $P(19)$ te berekenen)
- Hoe heet het verband tussen n en P ?
- Geef een formule om $P(n)$ in één keer te berekenen.
- Beantwoord de vragen b t/m d ook voor Q .
- Kan je dit ook doen met de vergelijking voor R ? Zo ja, doe dat dan.

Een formule waarmee je een antwoord in één keer kan berekenen, in plaats van via recursie heet een **directe formule**. Deze heb je dus gevonden bij d en e.

4. Rekenkundige en meetkundige rijen

Bij de recursievergelijking

$$\begin{cases} R(0)=3 \\ R(n)=R(n-1)+7 \end{cases}$$

hoort de directe formule

$$R(n) = 7n + 3$$

Je ziet dat in de directe formule aan de rechterkant alleen een n voorkomt.

De recursievergelijking van L geeft de volgende rij getallen:

3, 10, 17, 24, 31, ...

Deze rij begint bij 3 (het **startgetal**) en wordt telkens 7 groter (het **verschil**). Een rij waarvan het verschil telkens gelijk is, noemen we een **rekenkundige rij**. De directe formule van een rekenkundige rij is altijd een lineaire formule.

Wiskundigen beginnen met soms bij 0 te tellen en soms bij 1! Van een rij wordt het startgetal dan weer het 0-de getal genoemd en dan weer het 1-ste getal. Wees daarop bedacht!

Opgave 7. Geef de recursievergelijking en de directe formule die horen bij de volgende rijen:

- 6, 11, 16, 21, 26, ...
- 12, 8, 4, 0, -4, ...
- De rekenkundige rij met startgetal 13 en verschil 2.

De rijstkorrels op het schaakbord zijn een voorbeeld van een rij waarbij telkens wordt vermenigvuldigd wordt met hetzelfde getal. De rij zag er zo uit:

1, 2, 4, 8, 16, ...

Deze rij begint bij 1 (weer het startgetal) en wordt telkens 2 keer zo groot (de **reden**).

De recursievergelijking van deze rij is:

$$\begin{cases} M(0)=1 \\ M(n)=2M(n-1) \end{cases}$$

en de bijbehorende directe formule is:

$$M(n) = 1 \cdot 2^n$$

Zo'n rij, waarvan de reden telkens gelijk is, noemen we een **meetkundige rij**. De bijbehorende directe formule is altijd exponentieel.

Opgave 8. Geef de recursievergelijking en de directe formule die horen bij de volgende rijen:

- 6, 18, 54, 162, ...
- 24, 12, 6, 3, ...
- De meetkundige rij met startgetal 14 en reden 2,5.

Opgave 9. Geef directe formules voor de volgende recursieve vergelijkingen:

$$\begin{cases} A(0)=4 \\ A(n)=\frac{1}{2}A(n-1) \\ B(0)=-2 \\ B(n)=2 + B(n-1) \\ C(0)=0 \\ C(n)=C(n-1)^2 \\ D(0)=125 \\ D(n)=0,2 \cdot D(n-1) \end{cases}$$

Algemene formules

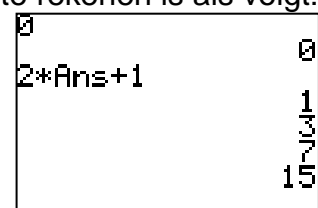
	Rekenkundige rij	Meetkundige rij
Recursief:	$\begin{cases} A(0)=b \\ A(n)=A(n-1) + a \end{cases}$	$\begin{cases} A(0)=b \\ A(n)=A(n-1) \cdot g \end{cases}$
Direct:	$A(n) = a \cdot n + b$	$A(n) = b \cdot g^n$

5. Rijen met de grafische rekenmachine

We doen dit telkens met als voorbeeld de toren van Hanoi. Hier nog een keer de recursievergelijking:

$$\begin{cases} A(0)=0 \\ A(n)=2A(n-1) + 1 \end{cases}$$

Een makkelijke manier om snel een aantal termen in een rij uit te rekenen is als volgt: Typ de eerste waarde in en druk enter

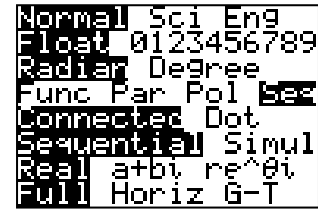


Gebruik daarna Ans als $A(n-1)$.

Elke keer als je Enter drukt, krijg je de volgende term.

Maar om nu ineens de 100^{ste} term te berekenen, ben je nog steeds lang bezig. Daarvoor heeft je rekenmachine een andere functie.

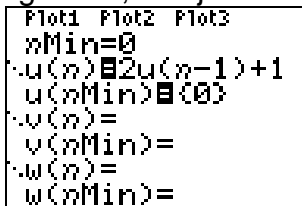
Stel eerst je rekenmachine in op de mode Seq. Deze instelling vind je onder de knop Mode. Seq is een afkorting voor *sequence*, Engels voor rij.



Als je nu op Y= drukt, zie je een ander scherm dan normaal. Hier kan je de recursievergelijking invullen.

- $nMin$ is de n die hoort bij de startwaarde. Wij hebben afgesproken dat dat eigenlijk altijd 0 is.
- $u(n)$ is de recursieve formule. Om $u(n-1)$ in te voeren gebruik je de u die boven de 7 op het toetsenbord staat en de n die je nu krijgt als je op de X, T, θ, n - knop drukt. Verder gebruik je gewoon haakjes. In ons geval voeren we hier in $2u(n-1)+1$
- $u(nMin)$ is de startwaarde. In ons geval dus 0. Als je dit invoert en op enter drukt, wordt dit automatisch veranderd in $\{0\}$.

Als het goed is, ziet je scherm er nu zo uit:

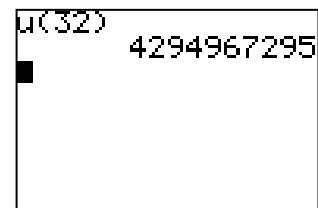


n	$u(n)$
0	0
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9
6	11
7	13
8	15
9	17
10	19
11	21
12	23
13	25
14	27
15	29
16	31
17	33
18	35
19	37
20	39
21	41
22	43
23	45
24	47
25	49
26	51
27	53
28	55
29	57
30	59
31	61
32	63
33	65
34	67
35	69
36	71
37	73
38	75
39	77
40	79
41	81
42	83
43	85
44	87
45	89
46	91
47	93
48	95
49	97
50	99
51	101
52	103
53	105
54	107
55	109
56	111
57	113
58	115
59	117
60	119
61	121
62	123
63	125
64	127
65	129
66	131
67	133
68	135
69	137
70	139
71	141
72	143
73	145
74	147
75	149
76	151
77	153
78	155
79	157
80	159
81	161
82	163
83	165
84	167
85	169
86	171
87	173
88	175
89	177
90	179
91	181
92	183
93	185
94	187
95	189
96	191
97	193
98	195
99	197
100	199

Rechts zie je het resultaat als je op Table drukt. Je kan ook een grafiek maken, je krijgt dan losse punten en je stelt je scherm als altijd in bij Window.

Als je meerdere recursievergelijkingen in wilt voeren, gebruik je v en w . Deze letters vind je ook terug boven de 8 en de 9.

In het gewone rekenscherm kan je nu makkelijk het aantal zetten berekenen wat de priesters nodig hebben om hun 64 stenen te verplaatsen. Je ziet hiernaast hoe je dat doet voor 32 stenen.



Opgave 10. Hoeveel jaar zouden de priesters er ongeveer over doen als ze 1 steen per seconde zouden verplaatsen? Als je bedenkt dat de huidige leeftijd van het heelal geschat wordt op 13.700.000.000 jaar, dan zie je dat we ons niet te veel zorgen om deze legende hoeven te maken...

Opgave 11. Gegeven is de recursievergelijking

$$\begin{cases} F(0)=72 \\ F(n)=\frac{F(n-1)}{3} + 3 \end{cases}$$

Vul met behulp van de functie Seq de volgende tabel verder in:

n	0	1	2	3	10	20	30
$F(n)$	72	27					

6. Gauss en de schoolmeester

Ergens aan het eind van de achttiende eeuw vroeg een schoolmeester aan de kinderen in zijn klas om alle getallen van 1 tot en met 100 bij elkaar op te tellen. Hij dacht dat ze hier wel even zoet mee zouden zijn maar tot zijn verbazing was er een leerling die meteen het antwoord gaf.

Het jongetje dat zo snel kon rekenen heette Carl Friedrich Gauss en werd later een van de beroemdste wiskundigen aller tijden.

Opgave 12. Probeer zelf te achterhalen hoe je op een slimme manier 1 tot en met 100 bij elkaar kunt optellen. Probeer eventueel eerst de som van de getallen 1 tot en met 10 op een handige manier uit te rekenen.

Noem de som (= optelling) van de eerste 100 getallen $s(100)$.

Door die som twee keer op te schrijven, de ene keer beginnend bij 1 en oplopend tot 100 en de andere keer beginnend bij 100 en afnemend tot 1, wordt duidelijk hoe Gauss misschien te werk is gegaan:

$$\begin{array}{r} s(100) = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 \\ s(100) = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2 \cdot s(100) = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

Opgave 13. Bekijk het bovenstaande schema nauwkeurig en leg uit dat

$$s(100) = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 = 5050$$

Als je het idee achter de methode van Gauss begrijpt, is het ook niet meer moeilijk om de som te bepalen van andere rijen getallen. De methode leent zich namelijk voor alle zogenaamde rekenkundige rijen.

Opgave 14. Controleer of je nog weet wat een rekenkundige rij precies is!

Opgave 15. Reken op dezelfde manier als hiervoor de som van de volgende rij getallen

- a. 2, 4, 6, 8, 10, 12,, 1000 (alle even getallen tussen 0 en 1000)
- b. 5, 10, 15, 20, 25,, 5000 (alle vijfvoudigen tussen 0 en 5000)

We kunnen deze methode van getallen optellen in zijn algemeenheid gebruiken voor rekenkundige rijen.

Opgave 16. Leg uit dat de methode om de **som van de eerste n termen van een rekenkundige rij** te bepalen, gebruik maakt van de volgende formule:

$$s(n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$$

Opgave 17. Bereken met behulp van de formule uit opgave 16 de som van de eerste 50 termen van de volgende rijen:

- $u(n) = u(n-1) + 2$ met $u(1) = 5$
- $u(n) = u(n-1) - 3$ met $u(1) = 45$
- $u(n) = u(n-1) + 7$ met $u(1) = -175$
- 2, 5, 8, 11, 14, 17,
- 100, 94, 88, 82,

7. Nog meer rijstkorrels

Het aantal rijstkorrels dat op het laatste vakje van het beroemde schaakbord kwam te liggen, kan Nederland met een behoorlijke laag bedekken, zoals je hebt berekend in een van de vorige paragrafen.

We gaan nu eens bekijken hoeveel rijstkorrels in totaal op het hele schaakbord zouden moeten liggen als de koning het verzoek van de uitvinder van het schaakbord zou hebben ingewilligd.

Om dit gemakkelijk te kunnen uitrekenen, onderzoeken we eerst eens of we een bepaalde formule kunnen afleiden waar we gebruik van kunnen maken.

Allereerst bekijken we de som van de korrels op de eerste 3 vakjes.

We kunnen dit natuurlijk direct uitrekenen: $1 + 2 + 4 = 7$.

Maar het gaat zoals je weet in de wiskunde niet om antwoorden maar om methodes!

Bekijk daarom nauwkeurig het onderstaande schema:

$$\begin{array}{rcl}
 s(3) & = 1 + 2 + 4 & = A(1) + A(2) + A(3) \\
 2s(3) & = 2 + 4 + 8 & = A(2) + A(3) + A(4) \\
 \hline
 s(3) - 2s(3) & = 1 - 8 & = A(1) - A(4)
 \end{array}$$

In de eerste regel van het schema zie je de som van de eerste 3 vakjes.

In de tweede regel is diezelfde som vermenigvuldigd met 2, de *reden* van deze rij.

Daarna is de tweede regel van de eerste regel afgetrokken.

Opgave 18.

- Leg uit dat hieruit volgt dat $s(3) = A(4) - A(1)$
- Bereken op dezelfde manier ook $s(4)$ en $s(5)$ en controleer of deze antwoorden kloppen.
- Geef de rangnummerformule of directe formule voor het aantal korrels $A(n)$ op het n -de vakje.
- Bereken nu de som van de korrels van alle 64 velden.

In het voorbeeld met het schaakbord, hebben we een 'slimme truc' bedacht om de som van een meetkundige rij te bepalen. Deze methode kunnen we generaliseren.

Bekijk de volgende meetkundige rij:

$$u(n) = b \cdot r^{n-1}$$

Opgave 19.

- a. Leg uit dat deze rij bestaat uit de termen

$$u(1) = b$$

$$u(2) = br$$

$$u(3) = br^2$$

etcetera

- b. Ga nu op dezelfde manier te werk als in het voorbeeld van het schaakbord om een formule af te leiden voor de som van de eerste drie termen met behulp van het schema hieronder:

$$\begin{array}{rcl}
 s(3) & = b + br + br^2 & = u(1) + u(2) + u(3) \\
 r \cdot s(3) & = br + br^2 + br^3 & = u(2) + u(3) + u(4) \\
 \hline
 s(3) - r \cdot s(3) & = b - br^3 & = u(1) - u(4)
 \end{array}$$

Je hebt nu een formule afgeleid voor de som van de eerste drie termen van een meetkundige rij. Op dezelfde manier kun je ook een formule afleiden voor de som van de eerste 4 termen van een meetkundige rij, voor de som van de eerste 5 termen, enzovoort.

In zijn algemeenheid vind je dan de volgende formule:

Bij een meetkundige rij $u(n)$ is de som $s(n)$ van de eerste n termen gelijk aan:

$$s(n) = \frac{\text{eerste term} - \text{eerstvolgende term}}{1 - \text{reden}} \quad \text{oftewel} \quad s(n) = \frac{u(1) - u(n+1)}{1 - r}$$

Opgave 20.

Bereken met de formule de som van de eerste 20 termen van de volgende rijen:

a. $u(n) = 2 \cdot 3^{n-1}$

b. $u(n) = 8 \cdot 5^{n-1}$

c. $u(n) = 4 \cdot u(n-1)$ met $u(1) = 2$

d. $12, 6, 3, 1\frac{1}{2}, \dots$

e. $0.3, 0.9, 2.7, \dots$

8. Toepassingen

Opgave 21. Bij de 10 km rijden de schaatsers 25 rondjes van 400 meter.

- a. Ben begint met een rondje van 34 seconden. Vervolgens rijdt hij elke ronde 0,15 seconde langzamer dan de voorgaande ronde. Bereken zijn eindtijd.
- b. Bart begint met een rondje van 36,5 seconden. Vervolgens rijdt hij elk rondje 0,2 seconden sneller dan de voorgaande ronde. Bereken de eindtijd van Bart

Opgave 22.

Iemand zet vanaf zijn 25e verjaardag elk jaar € 5000,- op een spaarrekening. De bank waarbij de spaarrekening loopt geeft elk jaar 6% rente. De spaarder hoopt op deze manier een flink bedrag te kunnen sparen dat op zijn 65e verjaardag wordt uitgekeerd.

De eerste inleg van € 5000,- is na 40 jaar gegroeid tot $5000 \times 1,06^{40}$ euro. De tweede inleg van € 5000,- staat natuurlijk een jaar minder op de rekening en is na de spaarperiode gegroeid tot $5000 \times 1,06^{39}$.

Als de spaarder zijn voornemen trouw blijft en de bank geeft elk jaar 6% rente, dan krijgt de spaarder op zijn 65e verjaardag een bedrag uitgekeerd van:

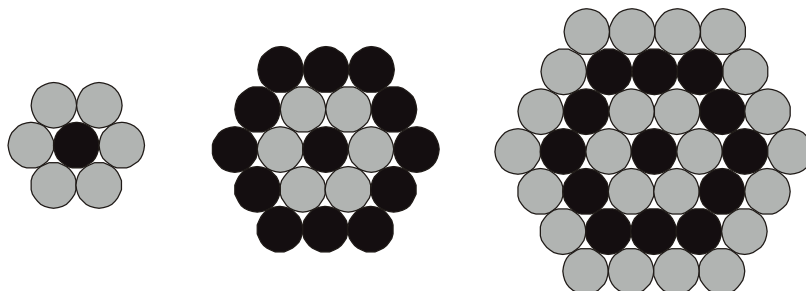
$$5000 \times 1,06 + 5000 \times 1,06^2 + \dots + 5000 \times 1,06^{38} + 5000 \times 1,06^{39} + 5000 \times 1,06^{40} \text{ euro.}$$

- a. Leg uit dat dit de som is van een meetkundige rij.
- b. Bereken hoeveel euro de spaarder op zijn 65e verjaardag van de bank krijgt uitgekeerd.

De spaarder wil graag 1 miljoen euro uitgekeerd krijgen op zijn 65e verjaardag.

- c. Hoeveel euro moet hij dan elk jaar elk jaar inleggen?

Opgave 23.



In de figuren hierboven liggen de cirkels dicht tegen elkaar, zodat ze zeshoekige ringen vormen.

De eerste, tweede en derde zeshoekige ring bestaan uit respectievelijk 6, 12 en 18 cirkels.

- Uit hoeveel cirkels bestaan de vierde en de vijfde zeshoekige ring?
- Stel een formule op voor het aantal cirkels in de n -de zeshoekige ring.
- Bereken het aantal cirkels in een figuur die uit 10 zeshoekige ringen bestaat.

Opgave 24.

Een gerucht doet op een bijzondere manier de ronde. Op de eerste dag kennen drie mensen het gerucht. De volgende dag vertelt elk van hen het gerucht door aan twee mensen die het nog niet kennen. Elke volgende dag doet ieder die het gerucht kent hetzelfde.

- Hoeveel mensen horen het gerucht de tweede dag?
- Elke dag hoort een bepaald aantal mensen het gerucht. Deze getallen vormen de rij $c(n)$. Bereken de eerste vijf termen van deze rij.
- Wat voor een rij is $c(n)$? Bedenk de recursievergelijking.
- Het aantal mensen dat het gerucht op een bepaalde dag kent vormt ook een rij. Noem deze rij $b(n)$.
Doe hetzelfde als bij b en c, maar dan voor $b(n)$.
- Wat voor rij is $b(n)$?
- Bereken het aantal mensen dat het gerucht kent na 30 dagen.

9. Verschilrijen

Rijen kun je op verschillende manieren bestuderen. Bijvoorbeeld door naar de verschillen tussen twee opeenvolgende termen te kijken.

Bekijk bijvoorbeeld de rij $u(n) = n^2$

Dit is de rij van de kwadraten: $u(0) = 0, u(1) = 1, u(2) = 4, u(3) = 9, \text{enzovoort}$

Laten we nu eens kijken naar de verschillen tussen de opeenvolgende termen door een nieuwe rij te vormen die bestaat uit de verschillen van de termen uit de rij $u(n)$.

We noemen de verschilrij $v(n)$.

Er geldt dan:

$$v(0) = u(1) - u(0) = 1 - 0 = 1$$

$$v(1) = u(2) - u(1) = 4 - 1 = 3$$

$$v(2) = u(3) - u(2) = 9 - 4 = 5$$

$$v(3) = u(4) - u(3) = 16 - 9 = 7$$

enzovoort

Of nog algemener: $v(n) = u(n+1) - u(n)$

De termen van de verschilrij doen vermoeden dat dit de rij van de oneven getallen is.

Opgave 25.

Laat met behulp van de formules zien dat dit zo is. Maak daartoe de volgende berekening af: $v(n) = u(n+1) - u(n) = (n+1)^2 - n^2 = \dots$

Opgave 26.

Bereken van de volgende rijen de eerste drie termen van de verschilrij.

a. $u(n) = 2(n+1) - 6$

b. $u(n) = 3^n - 5$

c. $u(n) = \ln(n^2)$

d. $u(n) = \frac{1}{n(n+1)}$

We gaan nu in het bijzonder kijken naar de verschilrijen van rekenkundige en meetkundige rijen.

Opgave 27.

- Laat met een voorbeeld zien dat de verschilrij van een rekenkundige rij altijd een constante rij is.
- Hoe volgt dit direct uit de recursieve formule van een rekenkundige rij?

Opgave 28.

- Bepaal de eerste vier termen van de verschilrij van de meetkundige rij $u(n) = 3 \cdot 5^n$
- Laat zien dat de eerste drie termen van deze verschilrij ook groeifactor 5 hebben.
- Bewijs nu in zijn algemeenheid dat de verschilrij van $u(n) = 3 \cdot 5^n$ ook een meetkundige rij is, en wel met reden 5 en beginwaarde 12.

De manier van opgave 28c kunnen we ook in zijn algemeenheid toepassen om te laten zien dat elke verschilrij van een meetkundige rij weer een meetkundige rij is met dezelfde reden.

Stel $u(n) = b \cdot r^n$, dus een meetkundige rij met reden r en beginwaarde b .

We bepalen nu de verschilrij:

$$v(n) = u(n+1) - u(n) = b \cdot r^{n+1} - b \cdot r^n = (br - b) \cdot r^n$$

En dus is de verschilrij een meetkundige rij met reden r en beginwaarde $br-b$.

Opgave 29.

Bepaal de verschilrij van de meetkundige rijen:

- $u(n) = 5 \cdot 3^n$
- $u(n) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$
- $u(n+1) = 3 \cdot u(n)$ met $u(0) = 4$

We hebben nu de verschilrij van een aantal rijen bepaald. Als je kijkt naar de verschilrij van een rekenkundige rij, dan zijn de verschillen tussen opeenvolgende termen constant. Dat is logisch want een rekenkundige rij is eigenlijk niet veel anders dan de rij getallen die je krijgt als je alleen gehele waarden invult in een lineaire functie.

Rijen kunnen natuurlijk ook van andere functies zijn afgeleid, bijvoorbeeld van kwadratische functies. De rij $k(n) = n^2 + 2n + 7$ is een voorbeeld van zo'n rij.

Dit is dus de rij 7, 10, 15, 22, 31,

Opgave 30.

- Ga na dat dit inderdaad de eerste 5 termen van $k(n) = n^2 + 2n + 7$ zijn.
- Bepaal de eerste 4 termen van de verschilrij van $k(n)$.
- Bepaal ook een algemene formule voor de verschilrij.
- Bepaal de verschilrij van de verschilrij! Wat valt je op?

Als je opgave 30 goed hebt uitgewerkt dan is je waarschijnlijk opgevallen dat de verschilrij van deze kwadratische rij een rekenkundige rij is. Dus de verschilrij van de verschilrij van een kwadratische rij is een constante rij!

Opgave 31.

Bepaal de verschilrij van de verschilrij van de rij $k(n) = 2n^2 - n + 1$

Opgave 32.

- Bepaal de eerste 8 termen van de rij $k(n) = n^3 + 2n - 1$
- Bepaal vervolgens de eerste 7 termen van de verschilrij van de verschilrij.
- Bepaal nu de de eerste 6 termen van de verschilrij van de v erschilrij van de verschilrij!
- Wat is je vermoeden over de verschilrijen van derdemachtsrijen?

Opgave 33.

Van een rij staan hieronder de eerste 7 termen met daaronder een deel van de verschilrij, daaronder een stukje van de verschilrij van de verschilrij, enzovoort.:

1	2	7	22	56	121	232
	1	5	15
	4	10
	6
	
		

- Bereken de ontbrekende getallen uit het schema zodat de onderste rij een constante rij is.
- Bereken door van onderaf naar boven te werken de 8-ste en de 9-de term van de oorspronkelijke rij uit.
- Van welke graad is de oorspronkelijke rij?

Na de voorgaande opgaven zal je wel duidelijk zijn dat er een algemene regel valt af te leiden met betrekking tot de verschilrijen van rijen die zijn afgeleid van machtsfuncties.

Opgave 34.

Formuleer voor jezelf die regel!

Opgave 35.

De rij $m(n) = 20n^{63} - n^9 + 7500$ is een 63-ste machtsrij, Hoe vaak moet je de verschilrij van de verschilrij nemen voordat je een constante rij krijgt?

Opgave 36.

Een 6-de machtsrij bestaat uit de volgende termen:

n	$u(n)$
1	1
2	49
3	649
4	3841
5	15001
6	45361
7	115249

Bereken de 8-ste term van deze rij.

10. De rij van Fibonacci

Leonardo di Pisa, alias Fibonacci (zoon van Bonaccio) leefde aan het eind van de 12-de en aan het begin van de 13-de eeuw. Hij is vooral bekend om de getallenrij die zijn naam draagt. Die (oneindige) rij begint met

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,

Het kenmerk van dit rijtje is dat elk getal de som is van de laatste 2 voorafgaande getallen.

Met andere woorden, als we het n-de getal aangeven met $f(n)$ dan is

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

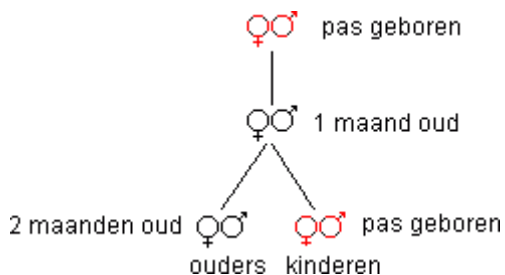
Opgave 37.

- Bepaal ook de elfde en de twaalfde term van de rij van Fibonacci.
- Bepaal ook de eerste tien termen van de verschilrij.
Wat valt je op?

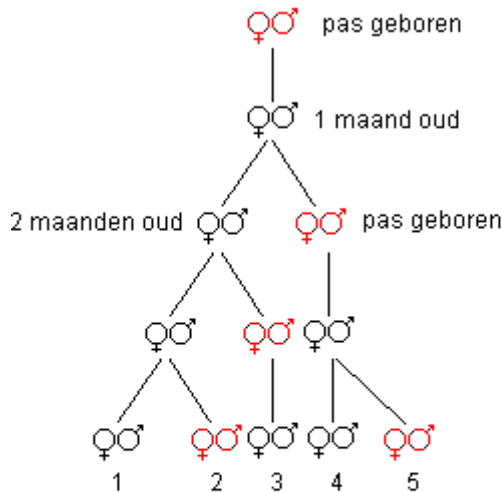
De rij gaf de oplossing voor een probleempje dat Fibonacci in 1202 formuleerde:

Een boer koopt op de markt in Pisa twee pasgeboren konijnen: een mannetje ♂ en een vrouwtje ♀.

De eerste maand brengt dit stel nog geen kleintjes voort, maar na de tweede maand worden de eerste twee konijnen geboren: een mannetje en een vrouwtje.



Gedurende de daaropvolgende maanden brengt dit eerste stel konijnen steeds twee konijnen van verschillend geslacht ter wereld. Maar ook de nakomelingen van dit stel gaan, nadat ze een maand oud zijn, zich voortplanten en brengen elke maand een stel konijnen ter wereld.



- 1 Het oorspronkelijke paar.
- 2 Hun pas geboren kinderen.
- 3 Hun 1 maand oude kinderen.
- 4 Hun 2 maanden oude kinderen.
- 5 De pas geboren kinderen van deze 2 maanden oude konijnen.

Het rijtje van Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... geeft aan hoeveel konijnenparen de boer in de opeenvolgende maanden heeft, als er vanuit wordt gegaan dat geen enkel stel doodgaat.

Dit laatste gaan we in de volgende opgave bewijzen.

Opgave 38.

Het aantal konijnenparen na n maanden zullen we aangeven met $f(n)$.

We willen nu aantonen dat $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$.

Geef het aantal pasgeboren konijnenparen na n maanden aan met $p(n)$ en het aantal niet-pasgeboren paren na n maanden met $g(n)$.

- a. Leg uit dat geldt dat $f(n) = p(n) + g(n)$.

Een maand later worden er $p(n+1)$ paren geboren.

- b. Leg uit dat geldt $p(n+1) = g(n)$.
- c. Leg uit dat $f(n) = g(n+1)$

We hebben dus de volgende relaties:

1. $f(n) = g(n) + p(n)$
2. $p(n+1) = g(n)$
3. $f(n) = g(n+1)$
- d. Bewijs met deze drie relaties dat $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$.

Het probleem met de konijnen toont een onrealistische genealogie. Beter komt de Fibonacci-rij tot zijn recht in de genealogie van darren (mannetjesbijen). Een mannetjesbij heeft namelijk geen vader. Bij bevruchting ontstaat altijd een vrouwtjesbij.

Een mannetjesbij heeft dus 1 moeder en 2 grootouders en 3 overgrootouders (want de mannelijke grootouder heeft geen vader). Je ziet zo het Fibonacci-rijtje $1, 1, 2, 3, 5, \dots$ ontstaan

Een ander elegant probleem waarbij de rij van Fibonacci wordt gegenereerd is het volgende

Iemand wil een stenen pad aanleggen. Daarvoor heeft hij de beschikking over twee soorten stenen. De ene soort is vierkant (1 bij 1) en de andere soort heeft afmeting 1 bij 2. Het pad is even breed als de breedte van een vierkante steen. Hoeveel verschillende paden (patronen) van lengte n kan hij leggen met deze 2 soorten stenen?

Opgave 39.

- Schets zelf een pad van lengte 7 met 3 vierkante 1×1 -stenen en twee rechthoekige 1×2 -stenen.
- Hoeveel verschillende paden met lengte 7 kun je maken?

We gaan in de opgave hieronder wat dieper op dit probleem in.

Opgave 40.

Laten we even afspreken dat we het aantal paden van lengte n aangeven met $a(n)$. De laatste steen van een pad van lengte n bestaat uit een 1×1 -steen of een 1×2 steen.

- Als die laatste steen een 1×1 -steen is, dan kan het overige deel van het pad op $a(n-1)$ manieren zijn opgebouwd. Leg dat uit!
- Als de laatste steen een 1×2 -steen is, dan kan het overige deel van het pad op $a(n-2)$ manieren zijn opgebouwd. Leg dit ook uit!
- Leg nu uit dat $a(n)$ de rij van Fibonacci is.

Opgave 41.

Op hoeveel manieren kun je een trap van 12 treden oprennen, als je telken één of twee treden tegelijk neemt?

De rij van Fibonacci kent allerlei verrassende eigenschappen die nog lang niet allemaal bekend zijn. Een van die eigenschappen, namelijk dat de verschilrij wederom getallen uit de oorspronkelijke rij oplevert, heb je in een van de voorgaande opgaves al kunnen ontdekken.

In de volgende opgaven bekijken we nog een paar eigenschappen.

Opgave 42. Bewijs de volgende eigenschappen van de rij van Fibonacci.

a. $f(n+1)^2 - f(n)^2 = f(n-1) \cdot f(n+2)$

b. $f(n+2)^2 - f(n-1)^2 = 4f(n) \cdot f(n+1)$

11. Convergentie

De Griek Zeno van Elea (ca. 490 v. Christus - ca. 430 v. Christus) was een beroemde filosoof uit de oudheid. In Griekenland en met name Athene werd in die tijd op een relatief moderne wetenschappelijke manier kritisch nagedacht over allerlei onderwerpen. Filosofen probeerden een beeld te krijgen van de wereld om hen heen, discussieerden met elkaar over vele zaken en bekritiseerden elkaars theorieën.

Zeno bedacht allerlei argumenten om de uitspraken van een andere filosoof, Parmenides die beweringen deed over 'de onmogelijkheid van verscheidenheid en verandering', te verdedigen. Beroemd en vooral berucht zijn diens uiteenzettingen over de onmogelijkheid van beweging.

Volgens de redenering van Zeno is het onmogelijk om een zekere afstand te overbruggen. Als je namelijk een bepaalde afstand wilt overbruggen, moet je eerst de helft van die afstand overbruggen. Maar om dat te doen moet je eerst weer de helft van die afstand overbruggen en vervolgens ook voor die helft eerst weer een helft overbruggen. Enzovoort, enzovoort.... Aangezien afstanden volgens Zeno oneindig vaak deelbaar zijn, kan men dus onmogelijk een gegeven afstand afleggen! In de tijd van Zeno kon men dit soort argumenten niet echt weerleggen, terwijl men, net als wij, toch uit ervaring wist dat een bepaalde afstand wel degelijk te overbruggen is.

Een van de beroemdste voorbeelden die Zeno bedacht om zijn beweringen kracht bij te zetten, gaat over een hardloophwedstrijd tussen Achilles en de schildpad. De schildpad krijgt een voorsprong op Achilles. Wanneer Achilles, nadat de schildpad al is vertrokken, het punt A bereikt, waar de schildpad kort tevoren was, is de schildpad intussen bij punt B aangekomen. Arriveert Achilles vervolgens bij dit punt B, dan is de schildpad intussen aangekomen bij punt C, enzovoorts. Conclusie: de achterstand wordt kleiner, maar Achilles haalt de schildpad nooit in want in de tijd dat hij de afstand die op een zeker tijdstip tussen hem en de schildpad bestaat, heeft afgelegd, is de schildpad toch weer iets verder gekomen. Dit is een paradox, want in werkelijkheid zou Achilles de schildpad natuurlijk wel inhalen!

De paradox wordt onder meer veroorzaakt door het feit dat de som van een oneindig aantal stappen toch eindig is. Start de schildpad bijvoorbeeld met 1000 meter voorsprong, en loopt Achilles tien keer zo snel als de schildpad, dan is de schildpad 100 meter verder als Achilles die 1000 meter heeft overbrugd. Als Achilles de resterende 100 meter heeft afgelegd, is de schildpad 10 meter verder, etcetera. Dus de voorsprong van de schildpad nadert via de rij $1000 \rightarrow 100 \rightarrow 10 \rightarrow 1 \rightarrow 0,1 \rightarrow 0,01 \rightarrow 0,001$ tot nul.

We kunnen de som van al die te overbruggen afstanden berekenen dankzij de ons inmiddels bekende formules van wiskundige rijen

De termen van deze oneindige som vormen een meetkundige rij met als eerste term 1000 en reden 0,1. We gebruiken de formule voor de som van de eerste n termen van een meetkundige rij met reden 0,1:

$$s(n) = \frac{1e\ term - (n+1)ste\ term}{1 - reden} = \frac{1000 - 1000 \cdot 0,1^n}{1 - 0,1} = \frac{1000 \cdot (1 - 0,1^n)}{0,9} = \frac{1000}{0,9} \cdot (1 - 0,1^n)$$

Als we n steeds groter nemen, dan wordt $0,1^n$ steeds kleiner en nadert steeds dichter tot 0.

Kortom voor hele grote waarden van n is $0,1^n$ verwaarloosbaar klein en nadert

$$\frac{1000}{0,9} \cdot (1 - 0,1^n) \quad \text{naar} \quad \frac{1000}{0,9} \cdot (1 - 0) = \frac{1000}{0,9}$$

We zeggen in de wiskunde dat de rij $s(n)$ convergeert (in dit geval naar $\frac{1000}{0,9}$)

Achilles haalt de schildpad in na een afstand van $\frac{1000}{0,9}$ meter. Dit is in

overeenstemming met de zintuiglijke waarneming. Wat Zeno in zijn verhaal suggereerde was dat de som van een oneindig aantal termen ook oneindig moest zijn. Wat niet het geval is, waarmee de paradox verklaard is.

Opgave 43. Stel dat Achilles drie keer zo snel loopt als de schildpad en 50 meter voorsprong krijgt, wat is dan de totale afstand die Achilles aflegt voordat hij de schildpad inhaalt?

De paradox kan ook op een andere manier worden doorzien: door naar het verloop van de tijd te kijken. Stel dat Achilles 5 meter per seconde loopt en de schildpad 5 cm per seconde, dus weer 10 keer zo langzaam. We geven de schildpad nu 5 meter voorsprong. Achilles bereikt dan na 1 seconde de startpositie van de schildpad, die dan weer 5 cm verder is. Over die 5 cm doet Achilles 1/100 seconde. De schildpad is dan een halve millimeter verder en Achilles bereikt dat punt vervolgens in 1/10.000 seconde.

Zeno laat dus in feite de tijd stilstaan om de indruk te wekken dat Achilles de schildpad niet inhaalt. Hij zet eigenlijk de video stil vlak voordat Achilles wint. De paradox blijkt ook om deze reden een drogreden¹ te zijn.

In het bovenstaande voorbeeld bleek de rij $s(n) = \frac{1000}{0,9} \cdot (1 - 0,1^n)$ te convergeren.

In de wiskunde zeggen we ook wel dat deze rij een limiet heeft.

De rij $s(n) = \frac{1000}{0,9} \cdot (1 - 0,1^n)$ is de somrij van de meetkundige rij

$$u(n) = 1000 \cdot 0,1^{n-1} \quad \text{met als eerste term } u(1) = 1000$$

¹ Een drogreden is een redden die schijnbaar correct is maar bij nadere bestudering vals blijkt te zijn

Misschien verwacht je dat de somrij van elke meetkundige rij een limiet heeft maar dat is niet zo. Niet van elke meetkundige rij is de somrij convergent. In de volgende opgave gaan we dit voor een aantal rijen uitzoeken.

Opgave 44. Bepaal van de volgende rijen de formule voor de somrij en zoek vervolgens uit of de somrij convergeert, dat wil zeggen een limiet heeft.

- a. $u(n) = 3 \cdot 0,7^{n-1}$ met als eerste term $u(1) = 3$
- b. $u(n) = 10 \cdot 7^{n-1}$ met als eerste term $u(1) = 10$
- c. $u(n) = 1000 \cdot 0,999^{n-1}$ met als eerste term $u(1) = 1000$
- d. $u(n) = 0,001 \cdot 1,001^{n-1}$ met als eerste term $u(1) = 0,001$
- e. Welk vermoeden kun je formuleren over het wel of niet convergeren van de somrij van een meetkundige rij?
- f. Zal de somrij van een rekenkundige rij convergeren, denk je?

Algemeen kunnen we dus stellen dat een meetkundige rij $u(n) = b \cdot r^{n-1}$ convergeert als de reden r kleiner is dan 1.

Van sommige rijen is het niet direct duidelijk of er sprake is van convergentie. Bekijk bijvoorbeeld de zogenaamde harmonische rij:

$$u(n) = \frac{1}{n} \quad \text{oftewel de rij} \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

Het is duidelijk dat deze rij zelf convergeert. De termen worden steeds kleiner en liggen steeds dichterbij 0 naarmate je n groter kiest in de term $\frac{1}{n}$.

Je zou misschien denken dat de somrij van de harmonische rij ook convergeert. Het is niet direct duidelijk of dit zo is.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \rightarrow ??$$

In de volgende opdracht ga je dit uitzoeken.

Opgave 45. We gaan de somrij $s(n)$ van $u(n) = \frac{1}{n}$ bestuderen.

- a. Bepaal allereerst de eerste 4 termen van $s(n)$.
- b. Teken een nette grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ op het interval $[0, 5]$
- c. Maak met behulp van de grafiek van $f(x) = \frac{1}{x}$ duidelijk dat geldt:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \int_1^5 \frac{1}{x} dx$$

d. Leg in zijn algemeenheid uit dat geldt:

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

e. Bereken de integraal uit opdracht d.

f. Heeft de uitkomst van opgave e voor grote n een bovengrens?

g. Waarom volgt uit het voorgaande dat de somrij van de harmonische rij niet convergeert!

Opgave 46. In deze opgave gaan we de rij $u(n) = \frac{1}{n!}$ bestuderen.

- Bepaal de eerste 7 termen van de rij en tevens hun som. Begin bij $u(0)$.
- Waarheen convergeert de somrij? Heb je een vermoeden?

Opgave 47. Gegeven is de recursievergelijking $u(n+1) = \frac{3}{4}u(n) + 4$

- Neem aan dat deze rij convergeert naar de limietwaarde L . Dat zou betekenen dat voor hele grote waarden van n de term $u(n)$ steeds meer gaat lijken op L . Leg uit dat de limietwaarde dan moet voldoen aan:

$$L = \frac{3}{4}L + 4$$

- Los de bovenstaande vergelijking op en geef de limietwaarde L .

- Laat zien dat de formule $u(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} (u(1) - L) + L$ aan de recursievergelijking voldoet.

- Laat zien dat in zijn algemeenheid geldt dat $u(n) = a^{n-1} \cdot (u(1) - L) + L$ de directe formule is die voldoet aan de recursievergelijking

$$u(n+1) = a \cdot u(n) + b \quad \text{met} \quad L = \frac{b}{1-a}$$

- Leg uit dat de rij uit opgave d alleen een limet heeft als $a < 1$

Er zijn nog meer methodes om de limiet van een rij te bepalen, dat wil zeggen te bepalen of een rij convergent is.

Een van die methodes maakt gebruik van zogenaamde webgrafieken. In de volgende paragraaf gaan we hier verder op in.

12. Webgrafieken

Van een rij waarvan de recursieve formule bekend is, kun je elke term uitrekenen als je de voorgaande term weet. Je begint bij de eerste term en berekent vervolgens met behulp van de recursieve formule de volgende term. Welke rij op deze manier ontstaat, hangt af van de gekozen beginwaarde. De beginwaarde bepaalt eveneens of de rij wel of niet convergeert.

$$\text{Bekijk bijvoorbeeld de rij } u(n+1) = \frac{1}{4} \cdot u(n)^2 - \frac{1}{2} \cdot u(n) + 1$$

Nemen we als beginterm de waarde 5 dan blijkt deze rij te convergeren naar een bepaalde limiet.

Opgave 48.

Probeer met behulp van je rekenmachine uit te zoeken naar welke waarde deze rij convergeert.

Opgave 49.

Zoek uit met je rekenmachine of de rij convergeert als we beginwaarde 2 kiezen. En bij beginwaarde 6?

Door lukraak te proberen, kunnen we enigszins achterhalen bij welke beginwaarden de rij convergeert. Met behulp van webgrafieken zullen we zien dat we wat makkelijker kunnen bepalen wanneer de rij een limiet heeft.

De bovenstaande rij $u(n+1) = \frac{1}{4} \cdot u(n)^2 - \frac{1}{2} \cdot u(n) + 1$ is eigenlijk afgeleid van de functie

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{2}x + 1.$$

Je zou de rij ook kunnen verkrijgen als je de beginwaarde 5 invult in de functie, de uitkomst opnieuw invult, etcetera.

$$u(0) = 5$$

$$u(1) = f(u(0))$$

$$u(2) = f(u(1))$$

$$u(3) = f(u(2))$$

..etcetera

We gaan dit nu in een zogenaamde webgrafiek zetten.

Dit gaat als volgt:

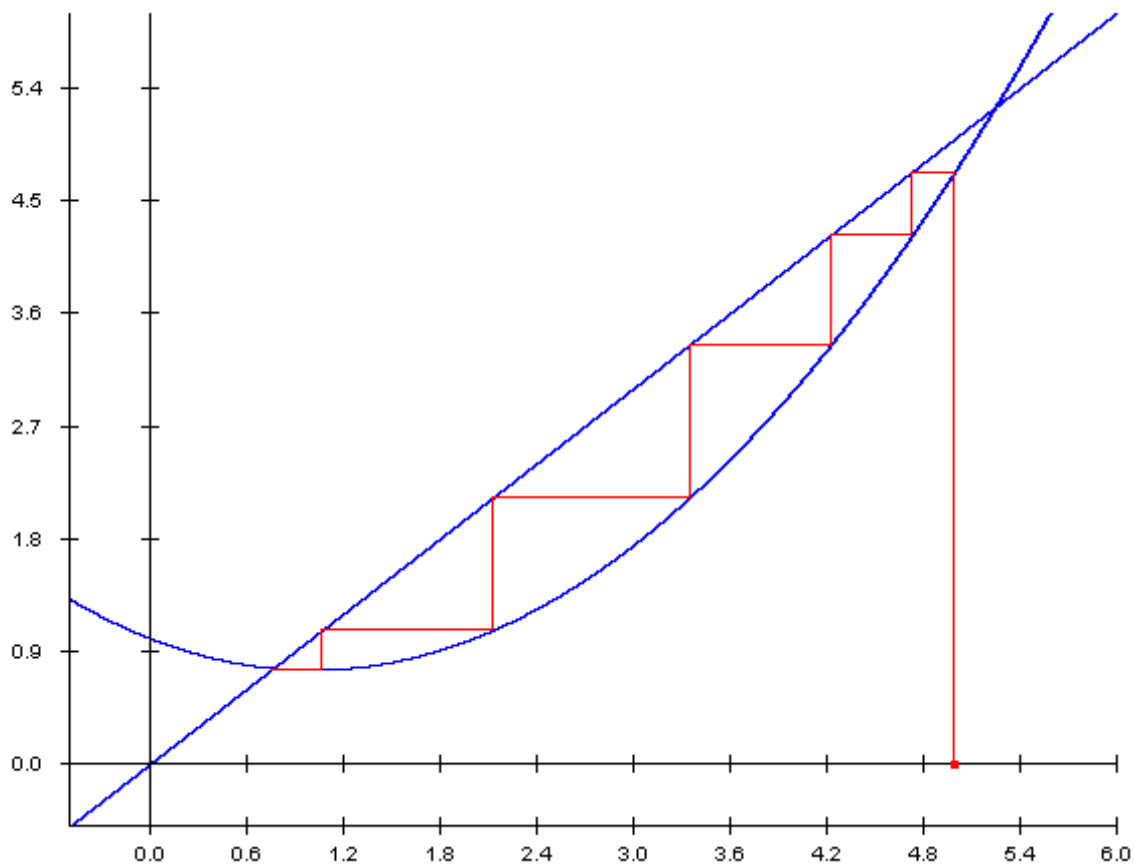
Opgave 50.

- Teken de grafiek van $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{2}x + 1$ op het interval $[0, 6]$
- Teken eveneens de hulplijn $y = x$
- Zet de beginwaarde $u(0)=5$ uit op de x-as en trek met een andere kleur een verticale lijn naar boven tot je de grafiek snijdt.

De y-waarde van dit punt is $u(1)$. Deze waarde $u(1)$ moet je nu weer als x-waarde uitzetten om $u(2)$ te kunnen bepalen.

- d. Zoek nu uit hoe je, door gebruik te maken van de lijn $y = x$ steeds de volgende waarde van de rij kunt verkrijgen

Als je in opgave 50 op de juiste manier te werk bent gegaan, heb je de volgende grafiek gekregen.



Zo'n grafiek heet ook wel een webgrafiek.

Opgave 51.

Aan de webgrafiek kun je zien dat de rij $u(n+1) = \frac{1}{4} \cdot u(n)^2 - \frac{1}{2} \cdot u(n) + 1$ bij beginwaarde 5 convergeert en naar een limiet loopt.

- Leg uit dat je deze limiet kunt vinden door de vergelijking $f(x) = x$ op te lossen.
- Los de vergelijking op.
- Bij onderdeel b. vond je twee oplossingen. Zijn beide oplossingen limieten?

Opgave 52.

Zoek uit hoe je een webgrafiek kunt tekenen met je rekenmachine.

Opgave 53.

Bepaal met behulp van de webgrafiek of de rij $u(n+1) = \frac{1}{4} \cdot u(n)^2 - \frac{1}{2} \cdot u(n) + 1$

convergeert voor de volgende beginwaarden:

- a. 1
- b. 6
- c. -2
- d. Zoek nu precies uit voor welke beginwaarden de rij geen limiet heeft en voor welke beginwaarden wel.

Opgave 54.

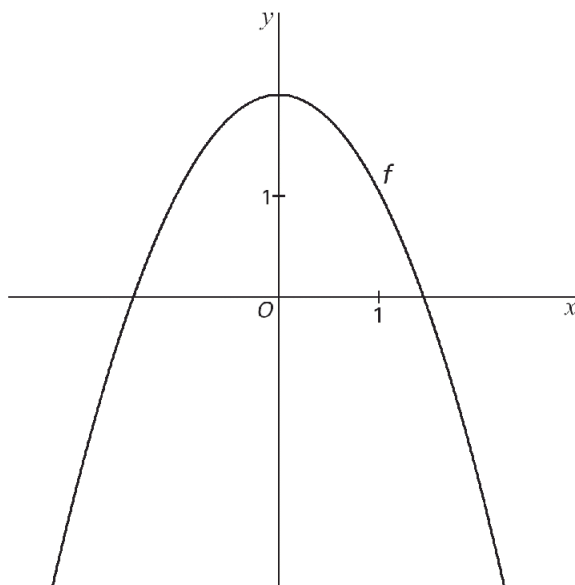
Teken de webgrafieken bij de volgende rijen, bepaal bij welke beginwaarden de rij convergeert en bereken de eventuele limiet:

- a. $u(n+1) = -u(n)^2 + 3u(n)$ $u(0) = \frac{1}{2}$
- b. $u(n+1) = -u(n)^3 + 3u(n)^2$ $u(0) = 1$
- c. $u(n+1) = -0,5u(n) + 3$ $u(0) = 1$
- d. $u(n+1) = 2u(n) + 3$ $u(0) = 1$

Opgave 55.

In onderstaande figuur staat de grafiek van de functie $f(x) = 2 - x^2$

Na keuze van een startwaarde $u(0)$ is de rij $u(0), u(1), u(2), u(3), \dots$ vastgelegd door $u_n = f(u_{n-1})$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).



- a. Neem als startwaarde de beginwaarde $-0,5$. Teken op de x -as met behulp van een webgrafiek de plaatsen van $u(1)$, $u(2)$ en $u(3)$.

Er zijn twee startwaarden waarbij de rij $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$, $u(3)$, ... constant is.

- b. Bereken deze startwaarden exact.

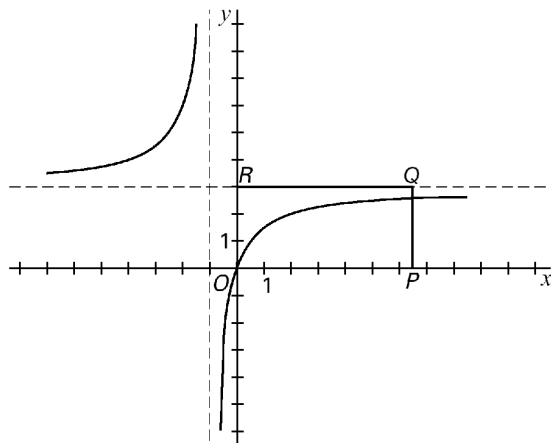
Neem $u(0) = a$.

Er zijn twee startwaarden a zodat de rij bestaat uit twee verschillende getallen a en b die elkaar afwisselen; de rij wordt dan a, b, a, b, a, \dots met $b \neq a$.

- c. Bereken beide waarden van a in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 56.

Gegeven is de functie $f(x) = 3 - \frac{3}{x+1}$.



In de figuur is rechthoek $OPQR$ getekend met $R(0, 3)$ en $P(b, 0)$ met $b > 0$.

De grafiek van f verdeelt de rechthoek in twee delen met gelijke oppervlakte.

- a. Bereken b in twee decimalen nauwkeurig.

Voor de rij $v(0)$, $v(1)$, $v(2)$, ... geldt $v(n) = f(v(n-1))$ met $v(0) \geq 0$ en $n \geq 1$.

- b. Onderzoek voor welke waarden van $v(0)$ de rij convergeert. Licht je antwoord toe, bijvoorbeeld met behulp van een webgrafiek.

Voor bepaalde startwaarden $v(0) < 0$ breekt de rij $v(0)$, $v(1)$, $v(2)$, ... met $v(n) = f(v(n-1))$ en $n \geq 1$ af, omdat de termen niet meer gedefinieerd zijn.

- c. Geef twee van dergelijke startwaarden. Licht je antwoord toe.