Formulekaart VWO wiskunde B

Kansrekening

Tellen

$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ ... \ \cdot 2 \cdot 1$

$0! = 1$

$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$ -wet: bij een serie van *n* onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som *S* en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten *X*:

$\mathrm{E}(S) = n \cdot \mathrm{E}(X)$ $\qquad \sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

$\mathrm{E}(\overline{X}) = \mathrm{E}(X)$ $\qquad \sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele *X* waarbij *n* het aantal experimenten is en *p* de kans op succes per keer geldt:

$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}$, met $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Verwachting: $\mathrm{E}(X) = n\,p$

Standaardafwijking: $\sigma(X) = \sqrt{n\,p\,(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele *X* die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en

$\mathrm{P}(X \le g) = \mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{g-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\dfrac{g-\mu}{\sigma}\right)$

Hierin is Φ de cumulatieve verdelingsfunctie van de standaardnormale verdeling.

Algebra en verbanden

Vergelijkingen

vergelijking	oplossing	voorwaarde
$ax^2+bx+c=0$	$x=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ of $x=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ met $D=b^2-4ac$	$a\neq 0,\ D\geq 0$
$x^n=c$	$x=c^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{c}$	$x>0,\ c>0,\ n>0$
$g^x=a$	$x={}^g\log a=\dfrac{\log a}{\log g}$	$a>0,\ g>0,\ g\neq 1$
${}^g\log x=b$	$x=g^b$	$x>0,\ g>0,\ g\neq 1$
$\mathrm{e}^x=a$	$x=\ln a$	$a>0$
$\ln x=b$	$x=\mathrm{e}^b$	$x>0$

Machten

regel	voorwaarde
$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$	$a>0$
$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$	$a>0,\ n>0$
$a^p\cdot a^q=a^{p+q}$	$a>0$
$a^p:a^q=a^{p-q}$	$a>0$
$(a^p)^q=a^{pq}$	$a>0$
$(ab)^p=a^pb^p$	$a,\ b>0$
${}^g\log a=\dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0;\ g\neq 1;\ a>0;\ p>0,\ p\neq 1$
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0;\ g\neq 1;\ a>0;\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\dfrac{a}{b}$	$g>0;\ g\neq 1;\ a>0;\ b>0$
${}^g\log a^p=p\,{}^g\log a$	$g>0;\ g\neq 1;\ a>0$

Verbanden

lineair verband $H = b + a \cdot t$	b is de beginwaarde en a is de helling of richtingscoëfficiënt
exponentieel verband $H = b \cdot g^t$	b is de beginwaarde en g is de groeifactor
harmonische trilling; $H = d + a \sin b(t-c)$ of $H = d - a \sin b(t-c)$	d is evenwichtstand , $(c;\ d)$ is beginpunt $\frac{2\pi}{b}$ is de periode, a is de amplitude en $a > 0$; $b > 0$

Somformules voor rijen

Voor de som S van de rekenkundige rij $a,\ a+v,\ a+2v,\ \ldots,\ a+(n-1)v$ geldt:

$$S = n \cdot \frac{\text{eerste term} + \text{laatste term}}{2}$$

Voor de som S van de meetkundige rij $a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \ldots,\ ar^{n-1}$ geldt:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\frac{1-r^n}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

Voor de som S van de meetkundige rij $a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \ldots$ met $-1 < r < 1$ geldt:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a\frac{1}{1-r}$$

Differentievergelijkingen

recursievergelijking	directe formule
$u(n+1) = a \cdot u(n) + b$ met beginwaarde $u(0)$	$u(n) = \frac{b}{1-a} + \left(u(0) - \frac{b}{1-a}\right)a^n$ of $u(n) = U + a^n\left(u(0) - U\right)$ met $U = \frac{b}{1-a}$
exponentiële groei $u(n+1) = a \cdot u(n)$	$u(n) = u(0) \cdot a^n$
logistische groei $u(n+1) = u(n) + c \cdot u(n) \cdot \left(G - u(n)\right)/G$ waarin G de grenswaarde is	

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
constante maal f	$g(x)=c\cdot f(x)$	$g'(x)=c\cdot f'(x)$
somregel	$s(x)=f(x)+g(x)$	$s'(x)=f'(x)+g'(x)$
productregel	$p(x)=f(x)\cdot g(x)$	$p'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
kettingregel	$k(x)=f(g(x))$	$\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\cdot\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ of $k'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$
standaardfuncties	$f(x)=c$	$f'(x)=0$
	$f(x)=x^n$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$
	$f(x)=\mathrm{e}^x$	$f'(x)=\mathrm{e}^x$
	$f(x)=g^x$	$f'(x)=g^x\cdot\ln g$ met $g>0$
	$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$
	$f(x)={}^g\log x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln g}$ met $g>0,\ g\neq 1$
	$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
	$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
	$f(x)=\tan x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$
Lineaire benadering van f in a: $L(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$		

Integreren

functie	primitieve
$f(x)=x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c \quad (n\neq -1)$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+c$
$f(x)=\mathrm{e}^x$	$F(x)=\mathrm{e}^x+c$
$f(x)=g^x$	$F(x)=\frac{1}{\ln g}g^x+c$
$f(x)=\ln x$	$F(x)=x\ln x-x+c$
$f(x)={}^g\log x$	$F(x)=\frac{1}{\ln g}(x\ln x-x)+c$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x+c$
$f(x)=\cos x$	$f(x)=\sin x+c$

Lengte van de grafiek van *f* op het interval $[a,\, b]$:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+(f\,'(x))^2}\;\mathrm{d}x$$

Inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door de grafiek van de functie *f* op het interval $[a,\, b]$ om de *x*-as te wentelen:

$$I=\pi\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} (f(x))^2\;\mathrm{d}x$$

Goniometrie

$\cos^2 t+\sin^2 t=1$ $\quad$ $\sin(-t)=-\sin t$ $\quad$ $\sin(\frac{\pi}{2}-t)=\cos t$ $\quad$ $\sin(\pi-t)=\sin t$

$\tan t=\frac{\sin t}{\cos t}$ $\quad$ $\cos(-t)=\cos t$ $\quad$ $\cos(\frac{\pi}{2}-t)=-\sin t$ $\quad$ $\cos(\pi-t)=-\cos t$

$\sin 2t=2\sin t\cos t$ $\quad$ $\cos 2t=\cos^2 t-\sin^2 t=2\cos^2 t-1=1-2\sin^2 t$

$\sin(t+u)=\sin t\cos u+\cos t\sin u$ $\quad$ $\sin t+\sin u=2\sin\frac{t+u}{2}\cos\frac{t-u}{2}$

$\sin(t-u)=\sin t\cos u-\cos t\sin u$ $\quad$ $\sin t-\sin u=2\sin\frac{t-u}{2}\cos\frac{t+u}{2}$

$\cos(t+u)=\cos t\cos u-\sin t\sin u$ $\quad$ $\cos t+\cos u=2\cos\frac{t+u}{2}\cos\frac{t-u}{2}$

$\cos(t-u)=\cos t\cos u+\sin t\sin u$ $\quad$ $\cos t-\cos u=-2\sin\frac{t+u}{2}\sin\frac{t-u}{2}$

$\sin\alpha=\sin\beta$ geeft $\alpha=\beta+k\cdot 2\pi$ of $\alpha=\pi-\beta+k\cdot 2\pi$

$\cos\alpha=\cos\beta$ geeft $\alpha=\beta+k\cdot 2\pi$ of $\alpha=-\beta+k\cdot 2\pi$

Parameterkrommen

Als $(x(t),\, y(t))$ de positie in het Oxy -vlak geeft van een bewegend punt op tijdstip *t*, dan wordt de snelheidsvector op tijdstip *t* gegeven door $((x'(t),\, (y'(t))$.

De snelheid van het punt op tijdstip *t* wordt gegeven door $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

en de lengte van de afgelegde weg tussen de tijdstippen $t = a$ en $t = b$ door $\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$

Eenparige cirkelbeweging met middelpunt $(m,\, n)$, straal *r* en hoeksnelheid ω:

$\begin{cases} x(t) = m + r\cos\omega(t - t_0) \\ y(t) = n + r\sin\omega(t - t_0) \end{cases}$ met $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ waarbij *T* de omlooptijd is.

Differentiaalvergelijkingen

differentiaalvergelijking	oplossingen
exponentiële groei of *verval* $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = cy$	$y(t) = y(0)\cdot \mathrm{e}^{ct}$
begrensde groei $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c(K - y)\ , c > 0$	$y(t) = K + (y(0) - K)\cdot \mathrm{e}^{-ct}$
logistische groei $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = cy(G - y)$	$y(t) = \dfrac{G}{1 + a\mathrm{e}^{-cGt}}$ waarin *G* de grenswaarde is en $a = \dfrac{G - y(0)}{y(0)}$

Meetkunde

De *cursief* gedrukte termen mogen als verwijzing in een bewijs gebruikt worden.

Rekenen in cirkels

lengte		
omtrek *cirkel*	$2\pi r$	r is straal
cirkelboog met middelpuntshoek α (rad)	αr	r is straal
oppervlakte		
oppervlakte cirkel	πr^2	r is straal
cirkelsector met middelpuntshoek α (rad)	$\frac{1}{2}\alpha r^2$	r is straal

Rekenen in driehoeken

- *Stelling van Pythagoras*:
  Als driehoek *ABC* een rechte hoek in *C* heeft, dan geldt $a^2 + b^2 = c^2$
- *Omgekeerde stelling van Pythagoras*:
  Als in driehoek *ABC* geldt $a^2 + b^2 = c^2$ dan is hoek *C* recht.
- *Cosinusregel*:
  In elke driehoek *ABC* geldt $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$
- *Sinusregel*:
  In elke driehoek *ABC* geldt $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Puntverzamelingen en meetkundige plaatsen

- De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee gegeven punten *A* en *B* is de middelloodlijn van het lijnstuk *AB* (*middelloodlijn*).
- De verzameling van alle punten binnen een hoek die dezelfde afstand hebben tot de benen van die hoek, is de deellijn (bissectrice) van die hoek (*deellijn*).
- De verzameling van alle punten die afstand *r* tot een gegeven punt *M* hebben, is de cirkel met middelpunt *M* en straal *r* (*cirkel*).
- De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee elkaar snijdende lijnen, is het deellijnenpaar (bissectricepaar) van die twee lijnen (*deellijnenpaar*).
- De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee evenwijdige lijnen, is de middenparallel van dat lijnenpaar (*middenparallel*).
- De verzameling van alle punten die gelijke afstand hebben tot een lijn *l* en een punt *F* niet op die lijn, is een parabool (*parabool*).
- *P* op *parabool* met brandpunt *F* en richtlijn $l \Leftrightarrow d(P,F) = d(P,l)$
- *P* op *ellips* met brandpunten F_1 en $F_2 \Leftrightarrow d(P,F_1) + d(P,F_2) = \text{constant}$
- *P* op *hyperbool* met brandpunten F_1 en $F_2 \Leftrightarrow \left|d(P,F_1) - d(P,F_2)\right| = \text{constant}$

Hoeken, lijnen en afstanden

- De overstaande hoeken bij twee snijdende lijnen zijn gelijk (*overstaande hoeken*).
- Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan zijn de F-hoeken en Z-hoeken gelijk (*F-hoeken*, *Z-hoeken*).
- Als twee lijnen in twee verschillende punten gesneden worden door een derde lijn, waarbij er een paar gelijke F-hoeken of Z-hoeken optreedt, dan zijn die twee lijnen evenwijdig (*F-hoeken*, *Z-hoeken*).
- Een rechte hoek is 90º, een gestrekte hoek is 180º.
- De som van de hoeken van een driehoek is 180º (*hoekensom driehoek*).
- De afstand (kortste verbinding) van een punt tot een lijn is de lengte van de loodlijn neergelaten vanuit dat punt op die lijn (*afstand punt tot lijn*).
- Als drie punten *A, B, C* niet op één lijn liggen dan geldt $|AB|+|BC|>|AC|$ (*driehoeksongelijkheid*)

Gelijkbenige driehoek

- Als in een driehoek twee hoeken gelijk zijn, dan zijn de tegenoverliggende zijden ook gelijk. (*gelijkbenige driehoek*)
- Als in een driehoek twee zijden gelijk zijn, dan zijn de tegenoverliggende hoeken ook gelijk. (*gelijkbenige driehoek*)

Gelijke driehoeken

Twee driehoeken zijn gelijk (congruent) als ze gelijk hebben:

- Een zijde en twee aanliggende hoeken (*HZH*).
- Een zijde, een aanliggende hoek en de tegenoverliggende hoek (*ZHH*).
- Twee zijden en de ingesloten hoek (*ZHZ*).
- Alle zijden (*ZZZ*).
- Twee zijden en de rechte hoek tegenover een van die zijden (*ZZR*).

Gelijkvormige driehoeken

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze gelijk hebben:

- Twee paren hoeken (*hh*).
- Een paar hoeken en de verhouding van de omliggende zijden (*zhz*).
- De verhouding van de zijden (*zzz*).
- Een paar rechte hoeken en de verhouding van de twee niet-omliggende zijden (*zzr*).

Vierhoeken

De som van de hoeken van een vierhoek is 360º (*hoekensom vierhoek*).

Equivalente definities en eigenschappen van een *parallellogram*.

- Er zijn twee paren evenwijdige zijden.
- Er zijn twee paren gelijke overstaande zijden.
- Twee overstaande zijden zijn gelijk en evenwijdig.
- De diagonalen delen elkaar middendoor.

Equivalente definities en eigenschappen van een *ruit*.

- Het is een parallellogram met vier gelijke zijden.
- Het is een parallellogram waarin een diagonaal een hoek middendoor deelt.
- Het is een parallellogram waarin de diagonalen elkaar loodrecht snijden.

Equivalente definities en eigenschappen van een *rechthoek*.

- Het is een vierhoek met vier rechte hoeken.
- Het is een parallellogram met een rechte hoek.
- Het is een parallellogram met gelijke diagonalen.

Raaklijneigenschappen

- De raaklijn in een punt *P* van een parabool maakt gelijke hoeken met de lijn die *P* verbindt met het brandpunt en de lijn door *P* loodrecht op de richtlijn. (*raaklijneigenschap parabool*)
- De raaklijn in een punt *P* van een ellips of hyperbool maakt gelijke hoeken met de lijnen die *P* verbinden met de twee brandpunten. (*raaklijneigenschap ellips of hyperbool)*

Cirkeleigenschappen

- Bij gelijke bogen behoren gelijke koorden(*boog en koorde*).
- De loodlijn vanuit het middelpunt op een koorde deelt die koorde middendoor (*loodlijn op koorde*).
- Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindingslijn van middelpunt en raakpunt (*raaklijn*).
- *Stelling van Thales*: Als hoek *C* in driehoek *ABC* recht is, dan ligt *C* op de cirkel met middellijn *AB*.
- *Omgekeerde stelling van Thales*: Als *C* op de cirkel met middellijn *AB* ligt, dan is $\angle ACB$ recht.
- *Stelling van de omtrekshoek*: Elke omtrekshoek is half zo groot als de bijbehorende middelpuntshoek.
- De hoek tussen een raaklijn en een koorde is gelijk aan de bij die koorde behorende omtrekshoek. (*hoek tussen koorde en raaklijn*).
- Als punt *C* over de cirkelboog *AB* tussen de punten *A* en *B* beweegt, dan verandert de grootte van $\angle ACB$ niet. (*stelling van de constante hoek*)
- Als punt *D* aan dezelfde kant van *AB* ligt als punt *C* en $\angle ADB = \angle ACB$, dan liggen *C* en *D* op dezelfde cirkelboog *AB*. (*omgekeerde stelling van de constante hoek*)
- *Koordenvierhoekstelling*: Als *ABCD* een koordenvierhoek is, dan is de som van elk paar overstaande hoeken 180º.
- *Omgekeerde koordenvierhoekstelling*: Als in een vierhoek de som van een paar overstaande hoeken 180º is, dan is het een koordenvierhoek.